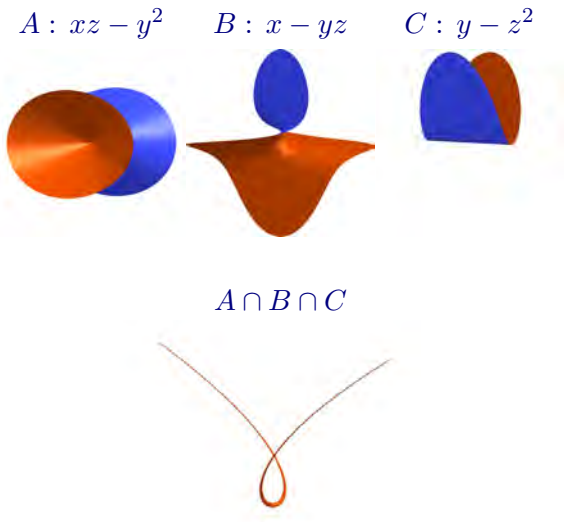
SURFER està dissenyat per a dibuixar superfícies, però amb una mica d'enginy també podem dibuixar-hi corbes. Donades dues superfícies definides per polinomis P i Q, l'equació

$$P^2 + Q^2 = 0$$

té per solucions reals els punts de l'espai que anul·len P i Q a la vegada, és a dir, la intersecció de les dues superfícies! Ara bé, si provem de dibuixar aquesta equació amb SURFER veurem que no hi surt res, ja que no hi ha superfície a dibuixar: la solució real és una corba. El que sí que podem fer és pertorbar una mica l'equació de manera que obtinguem una superfície molt propera a la corba. Per exemple, amb l'equació

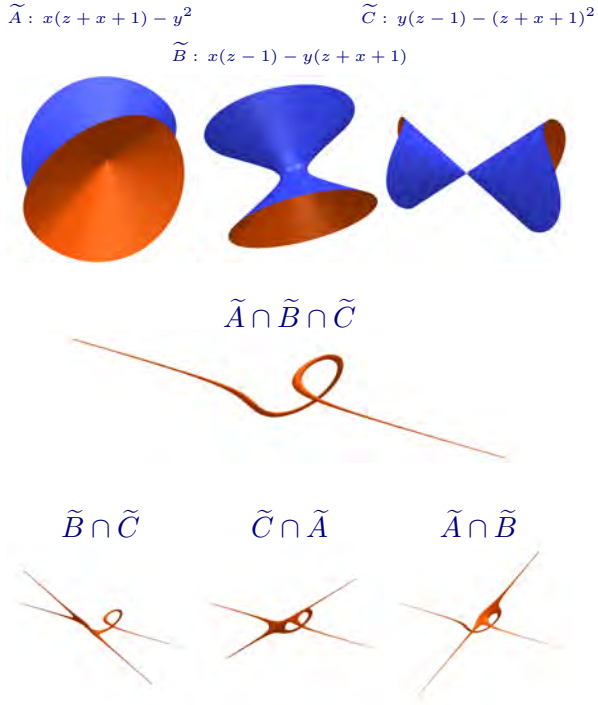
$$(xz - y^2)^2 + (x - yz)^2 + (y - z^2)^2 - 0.1 = 0$$

veurem la *cúbica torçada* (vegeu Figura 62).



La part finita de la cúbica torçada s'obté com a intersecció de les quàdriques aquí mostrades.

La cúbica torçada és l'exemple clàssic de corba a l'espai projectiu que no es pot obtenir com a intersecció de només dues superfícies. Què passa si eliminem una de les superfícies de la intersecció? Des del punt de vista afí un dels polinomis és prescindible, però si canviem de coordenades podem veure que no és així al projectiu (vegeu Figura 63). Si el lector vol entendre millor la intersecció, només li cal dibuixar el producte dels tres polinomis i jugar amb el ratolí.



Amb aquestes noves coordenades, es veu com la corba només s'obté com a intersecció de les tres quàdriques.

Matemàtiques i empresa

L'aprenentatge automàtic (*machine learning*): una projecció de les matemàtiques en el món industrial i empresarial.

Montse Alsina, Dept. Matemàtiques, UPC
Carles Sala, Empresa Pythia

Des de la comunitat matemàtica segurament tenim bastant clar que les matemàtiques són arreu, i per tant a l'empresa i la indústria també. Ara bé, quan es tracta d'explicar-ho a persones del món professional, i també a estudiants o públic en general, entrar en detalls no és pas fàcil. És obvi que, d'entrada, cal tenir en compte la manca d'experiència professional o expertesa dels matemàtics en les àrees amb les quals volem interactuar, sigui banca, consultoria, sectors industrials concrets, etc. I força sovint, cal reconèixer-ho, també juga en contra la manca de base matemàtica dels professionals d'aquestes àrees, si bé cada vegada hi ha més persones de formació matemàtica.

Però potser no són les especificitats de cada àrea l'obstacle més important, sinó el fet que, per a una bona comunicació, cal estar parlant sobre el mateix, i fer-ho utilitzant un llenguatge comú. Així, per exemple, difícilment convencerem un empresari que l'àlgebra lineal li pot ser útil. Però possiblement serà relativament fàcil posar-nos d'acord que el *machine learning*, l'aprenentatge automàtic, és realment imprescindible per progressar.

Potser aquesta és una manera, sense cap pretensió que sigui l'única, de comunicar el paper que tenen les matemàtiques al món: situar-nos clarament en un referent comú que connecti les dues àrees, un referent que vagi més enllà de simples números o formes. L'aprenentatge automàtic n'és un bon exemple.

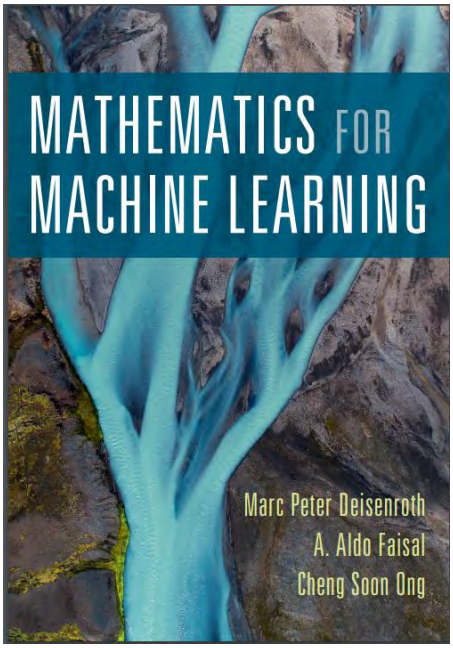
Segons el Termcat[12], l'aprenentatge automàtic es defineix com: "procés del camp de la intel·ligència artificial dedicat a l'anàlisi, el disseny i el desenvolupament d'algorismes i tècniques que permeten que les màquines evolucionin, millorant el seu comportament a partir de l'estudi d'observacions o de les experiències pròpies".

Actualment, l'aprenentatge automàtic i la intel·ligència artificial en general tenen moltes aplicacions en el món industrial i empresarial, en múltiples sectors. Per posar-ne un parell d'exemples ben diferents, al sector automobilístic (amb la conducció automàtica, el control del trànsit) o al sector mèdic (per al diagnòstic, seguiment, etc.). Àixí, l'aprenentatge automàtic cada dia està més present en les decisions que es prenen en alts nivells financers i empresarials, a la xarxa se'n poden trobar múltiples lloances, i tant l'interès com les noves aplicacions s'expandeixen ràpidament.

L'aprenentatge automàtic ha posat en evidència, als ulls dels empresaris, la importància que tenen les matemàtiques pels seus negocis. D'alguna manera, fins ara molta gent potser era racionalment conscient de que les matemàtiques hi eren, però no les tocaven de primera mà, ni necessitaven tenir cap mena de base matemàtica per poder entendre intuïtivament totes les parts del seu negoci. Però ara, amb la introducció de Machine Learning, això ha canviat. Sovint hi ha gent a tots els nivells organitzatius que es troben que si no tenen un mínim de comprensió de certs conceptes, encara que sigui només a nivell intuïtiu, no són capaços de fer un seguiment efectiu de l'activitat de certes àrees clau de l'empresa. No és estrany, doncs, trobar reunions on hi hagi tant tècnics com càrrecs directius d'empreses multinacionals parlant amb naturalitat sobre estimacions, probabilitats, classificacions o fins i tot families d'algoritmes en concret. Pot ser doncs una sortida professional.

En la mesura que siguem conscients del paper que hi tenen les matemàtiques, i el transmetem, posarem també en valor les matemàtiques de cara al món de l'empresa.

Però quins són els fonaments matemàtics de l'aprenentatge automàtic? Més enllà d'associar-ho a programació d'alt nivell, i gestió de moltes dades, quines són les matemàtiques que utilitza? I la pregunta és certament pertinent, si s'atenen debats que es troben a la xarxa. La resposta està exemplificada en el llibre *Mathematics for machine learning*, de M. P. Deisenroth, A. A. Faisal i C. S. Ong, que publicarà properament Cambridge University Press. A diferència d'altres llibres estàndards d'aprenentatge automàtic, presenta quatre exemples representatius d'algoritmes, i posa el focus en els conceptes matemàtics que hi ha darrere els models.



A més de dir que l'aprenentatge automàtic es basa en el llenguatge de les matemàtiques per expressar conceptes que semblen intuïtius, però sorprenentment difícils de formalitzar, en aquest llibre es respon sense complexos amb conceptes matemàtics clars. Els fonaments matemàtics són: àlgebra lineal, geometria analítica, descomposició matricial, càlcul vectorial, probabilitat i distribucions i optimització (vegeu la imatge anterior, extreta del llibre esmentat).

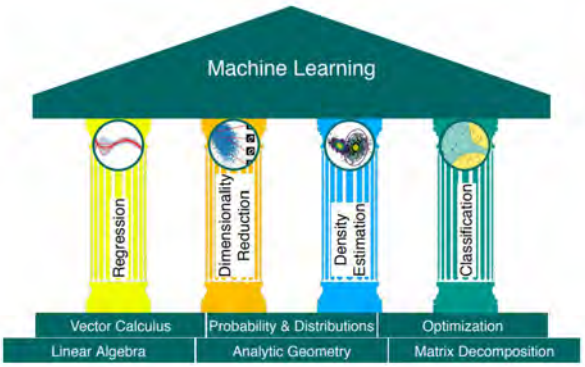
Amb paraules manllevades del mateix llibre es podria resumir en el següent. Es representen dades numèriques com a vectors, i una taula de dades o col·lecció de vectors com una matriu, de manera que apareix l'àlgebra lineal. Per comparar dos vectors que representen dos objectes del món real, cal

[12] El Consorci del Centre de Terminologia Termcat és el centre de terminologia de la llengua catalana, creat el 1985 per la Generalitat de Catalunya i l'Institut d'Estudis Catalans

estudiar-ne la similitud. Per formalitzar la idea de similitud i mesurar-la numèricament, s'operen vectors i apareixen distàncies, element central de la geometria analítica. La descomposició de matrius, i algunes operacions, són extremadament útils per a una interpretació intuïtiva de les dades i un aprenentatge més eficient. La teoria de probabilitats s'utilitza per expressar una mena d'incertesa i, per exemple, quantificar la confiança sobre el valor de la predicció. Per formar models d'aprenentatge de màquines, es trien paràmetres que maximitzin alguna mesura de rendiment i, per tant, s'utilitzen tècniques d'optimització.

És en aquest sentit que aquestes matemàtiques es projecten en el món industrial i empresarial gràcies a l'aprenentatge automàtic, i això pot ser un punt clau per explicar-nos al món.

També, com a professorat, ens pot fer pensar que no és, doncs, només casualitat que aquests temes figurin al programa de les guies docents. Confesso que en prenc nota i, en particular a les properes classes d'àlgebra lineal amb estudiants d'enginyeries, parlarem també d'aprenentatge automàtic. De fet, una queixa habitual dels estudiants de matemàtiques, fora dels graus específics de matemàtiques, és que els temes tractats semblen tenir poca rellevància en problemes pràctics. Tenim així un bon exemple de contextualització i motivació, que pot ser d'interès també per a docents de tots els nivells.



Fonaments i pilars de l'aprenentatge automàtic.

Matemàtiques i art

Icardi: pintura i matemàtiques

Imma Vall i Josep Vall
Professors de dibuix i matemàtiques

Art i matemàtiques

No hi ha dues cultures, només n'hi ha una. Però la cultura té molts camps: l'especialització i el desconeixement fan que molta gent es passegi per molt pocs d'aquests camps. Fins i tot un mateix camp pot ser tan gran i amb tantes parcel·les que se'n faci complicat el coneixement general. Diuen, per exemple, que Poincaré va ser l'últim matemàtic total. I va morir fa més d'un segle. L'art pot ser una bona eina per convidar-nos a passejar per terrenys desconeguts. D'altra banda, les matemàtiques poden ser una bona eina per observar els altres camps, els de l'art i molts d'altres.

Des de sempre hi ha hagut relacions entre l'art i les matemàtiques. Certament no tantes com ens hauria agradat. Potser el moment culminant va ser el Renaixement, amb la invenció de la perspectiva. Al segle XX, amb l'evidència dels avenços científics i tècnics, molts artistes es van tornar a interessar per les matemàtiques. Darrerament l'ús dels ordinadors està representant una renovació d'aquest interès. Amb l'ús de la informàtica, les matemàtiques s'han convertit en una eina bàsica per a molts artistes; de ben segur que en sortiran creacions interessants.

Gran cardioide

Qui és Icardi?

Icardi és el nom amb el qual els germans Imma i Josep Vall signem les nostres obres conjuntes.

Amb el pare pintor, vam créixer entre teles i pinzells, llibres d'art i olors d'aiguarràs i de pintura a l'oli. Alguna cosa n'havia de sortir. Un bon dia, un treball